Zur Theorie

der

LINEAREN SUBSTITUTIONEN.

Inauguraldissertation,

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Facultät

der

Kaiser-Wilhelms-Universität Strassburg

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Ludwig Maurer.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Strassburg,

Buchdruckerei von R. Schultz und Comp.

1887.

Curriculum vitae.

Ich bin in München den 11. Dezember 1859 als Sohn des dortigen Universitätsprofessors Dr. Konrad Maurer geboren, besuchte daselbst erst das Gymnasium, später die Universität und setzte dann meine Studien in Strassburg fort. Im Jahre 1883 habe ich in meiner Vaterstadt das Staatsexamen abgelegt.

Meinen verehrten Lehrern, insbesondere den Herren Professoren Dr. Bauer in München, Dr. Christoffel und Dr. Reye in Strassburg erlaube ich mir an dieser Stelle für die vielfache Förderung meiner Studien meinen besten Dank zu sagen.

Ludwig Maurer.

Zur Theorie

der

LINEAREN SUBSTITUTIONEN.

Ein particuläres Integral y_λ einer linearen und homogenen Differentialgleichung, deren Coefficienten Funktionen einer complexen Variabeln x sind, bleibt einwertig und stetig, wenn der Weg des variabeln Punktes x auf ein Flächenstück beschränkt wird, das keinen singulären Punkt (Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt) der Coefficienten der Differentialgleichung enthält. Beschreibt dagegen der Punkt x einen Ringweg, der einen singulären Punkt O der Coefficienten der Differentialgleichung einschliesst, so ist im Allgemeinen der Endwert y'_λ des Integrals vom Anfangswerte y_λ verschieden*. Ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2 \dots y_n$ geht durch die Umkreisung des singulären Punktes O in ein Fundamentalsystem $y'_1, y'_2 \dots y'_n$ über, das aus dem ursprünglichen durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante

$$(1) \qquad y'_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \dots n)$$

hervorgeht. Diese Substitution bestimmt die Verzweigung des Fundamentalsystems $y_1, y_2 \dots y_n$ im Punkte O. Ist für ein Fundamentalsystem die Verzweigung im Punkte O gegeben, so ist die Verzweigung jedes anderen Fundamentalsystems in diesem Punkte bestimmt.

Gehen nämlich die Integrale eines zweiten Fundamentalsystems $z_1, z_2 \dots z_n$ nach einer Umkreisung des Punktes O in $z'_1, z'_2 \dots z'_n$ über und ist

$$(2) \qquad z_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, y_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \dots n),$$

wo die Determinante der $a_{\lambda\mu}$ nicht verschwindet, so ist

$$(3) \qquad z'_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, y'_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \dots n)$$

---

* Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 66.

Eliminirt man aus den Gleichungen (1), (2) und (3) die y_λ und y'_λ, so erhält man eine Substitution, welche das System der z_λ in das der z'_λ überführt. Durch diese Substitution ist für das Fundamentalsystem der z_λ die Verzweigung im Punkte O bestimmt.

Bezeichnet man die Substitutionen (1) und (2), welche das System der y_λ in das System y'_λ beziehungsweise in das der z_λ überführen, symbolisch mit B und A, so wird die Substitution P, welche das System der z_λ in das der z'_λ überführt, symbolisch durch $A^{-1} B A$ dargestellt.

Die Substitution P heisst die Transformirte der Substitution B.

Es ergeben sich nun die beiden folgenden algebraischen Probleme:

1) Die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür anzugeben, dass eine gegebene Substitution B in eine andere P transformirt werden kann; und

2) Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, alle Substitutionen anzugeben, welche B in P transformiren.

Das erste dieser beiden Probleme entspricht der Aufgabe: Wenn die Verzweigung eines Fundamentalsystems von Integralen um den Punkt O gegeben ist, anzugeben, welche Arten von Verzweigung bei den übrigen Fundamentalsystemen auftreten können.

Das zweite entspricht der Aufgabe: Alle Fundamentalsysteme anzugeben, welche in einer bestimmten Art verzweigt sind.

Die Lösung des ersten Problems hat Herr WEIERSTRASS gegeben (Monatsberichte der Berliner Akademie 1868). Was das zweite betrifft, so hat Herr FROBENIUS (CRELLE's Journal, Band 84) die Anzahl der Parameter, von denen die Coefficienten der transformirenden Substitution abhängen, und für die einfachsten Fälle auch einen Ausdruck für die Coefficienten selbst angegeben, ohne seinen Beweis mitzuteilen.

In der folgenden Untersuchung wird die Lösung des ersten Problems auf einem Wege durchgeführt, welcher von dem von Herrn WEIERSTRASS eingeschlagenen etwas abweicht. Derselbe bietet den Vorteil, dass er unmittelbar auch zur Lösung des zweiten Problems führt.

I.

Die Bedingungen, unter welchen die Transformation möglich ist.

Soll die Substitution B durch die Substitution A in die Substitution P transformirt werden, so müssen für alle Werte der z_λ die Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad y'_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}\, y_\mu$$

$$(2) \qquad z'_\lambda = \sum_\mu p_{\lambda\mu}\, z_\mu$$

für $\lambda = 1, 2, 3 \ldots n$

$$(3) \qquad z_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, y_\mu$$

$$(4) \qquad z'_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu}\, y'_\mu$$

Werden die Coefficienten der der Substitution A entgegengesetzten Substitution mit $\alpha_{\lambda\mu}$ bezeichnet, so dass

$$\sum_\nu a_{\lambda\nu}\, \alpha_{\nu\mu} = \binom{\lambda}{\mu}^*$$

ist, so lassen sich die Gleichungen (3) ersetzen durch die folgenden

$$(5) \qquad y_\lambda = \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}\, z_\mu$$

und es ergibt sich aus (4), (1) und (5)

$$z'_\lambda = \sum_\nu \sum_\varkappa a_{\lambda\nu}\, b_{\nu\varkappa}\, y_\varkappa = \sum_\nu \sum_\varkappa \sum_\mu a_{\lambda\nu}\, b_{\nu\varkappa}\, \alpha_{\varkappa\mu}\, z_\mu$$

Durch Vergleich mit (2) folgt hieraus

$$(6) \qquad p_{\lambda\mu} = \sum_\nu \sum_\varkappa a_{\lambda\nu}\, b_{\nu\varkappa}\, \alpha_{\varkappa\mu}$$

Die Determinante der Substitution A darf nicht verschwinden, weil die Substitution umkehrbar sein muss. Dagegen ist es für das Folgende unwesentlich, ob die Determinante der Substitution B verschwindet oder nicht.

Die Gleichungen (6) sind immer erfüllt, welches auch die Werte der $a_{\lambda\mu}$ sein mögen, wenn man $b_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu} r$ setzt. Sind sie daher für bestimmte Wert-

---

* Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ bedeute 1 oder 0, je nachdem λ und μ gleich oder ungleich sind.

systeme der $b_{\lambda\mu}$ und $p_{\lambda\mu}$ erfüllt, so bleiben sie bestehen, wenn man $b_{\lambda\mu}$ durch $b'_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r$ und gleichzeitig $p_{\lambda\mu}$ durch $p'_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r$ ersetzt.

Die Determinante der $p'_{\lambda\mu}$ ist gleich dem Produkte aus den Determinanten der $b'_{\lambda\mu}$, der $a_{\lambda\mu}$ und der $\alpha_{\lambda\mu}$, also, da das Produkt der beiden letzten Determinanten gleich 1 ist, gleich der Determinante der $b'_{\lambda\mu}$ und zwar für jeden Wert von r.

Als Funktionen von r betrachtet, haben daher die beiden Determinanten dieselben Wurzelfaktoren.

Ersetzt man in einer Unterdeterminante $n - h^{ten}$ Grades der Determinante der $p'_{\lambda\mu}$ die Elemente $p'_{\lambda\mu}$ durch ihre Werte in Funktion der $b'_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda\mu}$ und $\alpha_{\lambda\mu}$, so lässt sich dieselbe in ein Aggregat entwickeln, in dem jedes Glied ein Produkt aus je einer Unterdeterminante $n - h^{ten}$ Grades der Determinante der $b'_{\lambda\mu}$, der Determinante der $a_{\lambda\mu}$ und der Determinante der $\alpha_{\lambda\mu}$ ist.

Ein gemeinschaftlicher Teiler aller Unterdeterminanten $n - h^{ten}$ Grades der Determinante der $b'_{\lambda\mu}$ ist daher auch gemeinschaftlicher Teiler aller Unterdeterminanten gleichen Grades der Determinante der $p'_{\lambda\mu}$.

Wir erhalten daher als notwendige Bedingung dafür, dass die Substitution B in die Substitution P transformirt werden kann:

Als Funktionen von r betrachtet, müssen die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} b_{11}-r & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-r & b_{23} \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-r \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots & b_{nn}-r \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} p_{11}-r & p_{12} & p_{13} \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-r & p_{23} \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-r \dots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} \dots & p_{nn}-r \end{vmatrix}$$

die «Fundamentaldeterminanten» der beiden Substitutionen in ihren Wurzelfaktoren übereinstimmen und jeder gemeinschaftliche Divisor aller Unterdeterminanten eines bestimmten Grades der einen muss auch gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten desselben Grades der anderen sein.

Dieser Satz lässt sich einfacher ausdrücken mit Hülfe des von Herrn Weierstrass eingeführten Begriffes der Elementarteiler.

Die Fundamentaldeterminante $\Delta(r)$ der Substitution B habe n' verschiedene Wurzelfaktoren

$$r_1 - r \quad r_2 - r \quad r_3 - r \dots$$

Der Faktor $r_\nu - r$ sei in $\Delta(r)$ genau $l^{(\nu)}$ mal und in jeder Unterdeterminante

$n-1^{ten}$ $n-2^{ten}$ . . . $n-h^{ten}$ . . . $n-m^{(\nu)ten}$ Grades

mindestens $l_1^{(\nu)}$ $l_2^{(\nu)}$ . . . $l_h^{(\nu)}$ . . . $l_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$ fach enthalten.

Die Unterdeterminanten $n-m^{(\nu)}-1^{ten}$ Grades seien nicht alle durch $r_\nu - r$ und die Unterdeterminanten $n-h^{ten}$ Grades seien nicht alle durch eine höhere als die $l_h^{(\nu)te}$ Potenz dieses Faktors teilbar.

In der Reihe der Zahlen

$$l^{(\nu)} \quad l_1^{(\nu)} \quad l_2^{(\nu)} \quad \ldots \quad l_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

kann keine grösser als die vorhergehende sein, denn ein gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten $n-h-1^{ten}$ Grades ist offenbar auch gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten $n-h^{ten}$ Grades. Da ferner die Derivirte einer Unterdeterminante $n-h^{ten}$ Grades sich als Summe von Unterdeterminanten $n-h-1^{ten}$ Grades darstellen lässt, so muss $l_h^{(\nu)}$ mindestens um eine Einheit grösser als $l_{h+1}^{(\nu)}$ sein.

Die Differenzen

$$l^{(\nu)} - l_1^{(\nu)} = e_0^{(\nu)} \quad l_1^{(\nu)} - l_2^{(\nu)} = e_1^{(\nu)} \quad \ldots \quad l_{m^{(\nu)}}^{(\nu)} = e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

sind daher alle positiv.

Die Faktoren

$$(r_\nu - r)^{e_0^{(\nu)}} \quad (r_\nu - r)^{e_1^{(\nu)}} \quad \ldots \ldots$$

heissen nach Herrn WEIERSTRASS Elementarteiler von $\Delta(r)$.

Danach lässt sich der oben bewiesene Satz auch so aussprechen:

Damit zwei Substitutionen in einander transformirt werden können, ist erforderlich, dass ihre Fundamentaldeterminanten in ihren Elementarteilern übereinstimmen.

Um zu beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, werde ich nachweisen, dass sich jede Substitution in eine Normalform transformiren lässt, deren Coefficienten durch die Elementarteiler der Fundamentaldeterminante vollkommen bestimmt sind.

Wird die Substitution B durch die Substitution S, die Substitution P durch die Substitution T in die Normalform N transformirt, so wird B durch die Substitution $S\,T^{-1}$ in P transformirt, wie sich sofort aus den symbolischen Gleichungen*

$$N \sim S^{-1}\,B\,S \qquad N \sim T^{-1}\,P\,T$$

ergibt.

Wir erhalten alle Substitutionen, welche B in P transformiren, wenn wir für T eine bestimmte Substitution, welche P in N transformirt, und für S alle möglichen Substitutionen, welche B in N transformiren, setzen.

---

* Um den Unterschied zwischen symbolischen und realen Gleichungen augenfällig zu machen, benütze ich bei ersteren statt des Gleichheitszeichens das Zeichen $\sim$.

Unsere Aufgabe reducirt sich somit darauf: Alle Substitutionen anzugeben, welche eine Substitution B in die Normalform transformiren.

II.

Normalform einer Substitution.

Weiter unten wird nachgewiesen werden, dass die Exponenten der Elementarteiler von $\Delta(r)$ den Ungleichungen

$$(1) \qquad e_0^{(\nu)} \geq e_1^{(\nu)} \geq e_2^{(\nu)} \ldots \geq e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

genügen. Vorerst nehme ich diese Ungleichungen als bewiesen an und suche unter dieser Voraussetzung eine Substitution herzustellen, deren Fundamentaldeterminante die Elementarteiler

$$(r_\nu - r)^{e_0^{(\nu)}} \; (r_\nu - r)^{e_1^{(\nu)}} \ldots (r_\nu - r)^{e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}} \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots n')$$

hat und deren Coefficienten nur von diesen Elementarteilern, nicht von weiteren Parametern abhängen.

Zu diesem Zweck gehe ich aus von der Substitution $e_h^{(\nu)\text{ten}}$ Grades S_h:

$$\begin{aligned}
y_{1h}^{(\nu)} &= r_\nu \; x_{1h}^{(\nu)} \\
y_{2h}^{(\nu)} &= r_\nu \; x_{2h}^{(\nu)} + x_{1h}^{(\nu)} \\
y_{3h}^{(\nu)} &= r_\nu \; x_{3h}^{(\nu)} + x_{2h}^{(\nu)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{e_h^{(\nu)} h}^{(\nu)} &= r_\nu \; x_{e_h^{(\nu)} h}^{(\nu)} + x_{e_h^{(\nu)} - 1\, h}^{(\nu)}
\end{aligned}$$

Die Fundamentaldeterminante σ_h dieser Substitution ist $= (r_\nu - r)^{e_h^{(\nu)}}$; die Unterdeterminanten derselben haben keinen gemeinschaftlichen Divisor, denn die Unterdeterminante des letzten Elements der ersten Horizontalreihe ist $= 1$.

Die $m^{(\nu)} + 1$ Substitutionen $S_0 \; S_1 \; S_2 \ldots S_{m^{(\nu)}}$ bilden zusammengenommen eine Substitution T_ν vom Grade $e_0^{(\nu)} + e_1^{(\nu)} + e_2^{(\nu)} \ldots + e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)} = l^{(\nu)}$. Die Fundamentaldeterminante τ_ν dieser Substitution ist das Produkt der $m^{(\nu)} + 1$ Determinanten σ_h, also $= (r_\nu - r)^{l^{(\nu)}}$.

Jede Unterdeterminante $l^{(\nu)}$ — 1ten Grades von τ_ν, die nicht für jeden Wert von r verschwindet, lässt sich darstellen als Produkt einer Unterdeterminante $e_i^{(\nu)}$ — 1ten Grades einer Determinante σ_i in das Produkt der $m^{(\nu)}$ übrigen Determinanten σ_h.

Der Exponent der höchsten Potenz von $r_\nu - r$, durch welche diese Unterdeterminanten alle teilbar sind, ist somit $e_0^{(\nu)} + e_1^{(\nu)} \ldots + e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$ — dem grössten aller e und dies ist wegen der Ungleichheiten (1) $e_0^{(\nu)}$; also ist dieser Exponent

$$= l^{(\nu)} - e_0^{(\nu)} = l_1^{(\nu)}.$$

Eine nicht identisch verschwindende Unterdeterminante $l^{(\nu)}$ — 2ten Grades von τ_ν ist entweder das Produkt aus einer Unterdeterminante $e_i^{(\nu)}$ — 2ten Grades einer Determinante σ_i in das Produkt der $m^{(\nu)}$ übrigen Determinanten σ_h oder das Produkt einer Unterdeterminante $e_i^{(\nu)}$ — 1ten Grades von σ_i, einer Unterdeterminante $e_j^{(\nu)}$ — 1ten Grades von σ_j und den $m^{(\nu)} - 1$ übrigen Determinanten σ_h. Der Exponent der höchsten Potenz von $r_\nu - r$, durch welche diese Unterdeterminanten alle teilbar sind, ist somit $e_0^{(\nu)} + e_1^{(\nu)} \ldots + e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$ vermindert um die Summe der beiden grössten e, also $= l^{(\nu)} - e_0^{(\nu)} - e_1^{(\nu)} = l_2^{(\nu)}$.

Allgemein ist $(r_\nu - r)^{l_h^{(\nu)}}$ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Unterdeterminanten $l^{(\nu)}$ — h^{ten} Grades von τ_ν. τ_ν hat demnach die Elementarteiler

$$(r_\nu - r)^{e_0^{(\nu)}} \quad (r_\nu - r)^{e_1^{(\nu)}} \ldots \ldots (r_\nu - r)^{e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}}.$$

Die n' Substitutionen $T_1\ T_2 \ldots T_{n'}$ bilden zusammengenommen eine Substitution n^{ten} Grades N. Die Fundamentaldeterminante D dieser Substitution ist das Produkt der n' Determinanten τ_ν; $D(r)$ hat also dieselben Wurzelfaktoren wie $\Delta(r)$.

Eine nicht identisch verschwindende Unterdeterminante n — 1ten Grades von D ist das Produkt einer Unterdeterminante $l^{(\varkappa)}$ — 1ten Grades von $\tau_\varkappa$ und der übrigen $n' - 1$ Determinanten τ_ν.

Eine nicht identisch verschwindende Unterdeterminante n — 2ten Grades von D ist entweder das Produkt einer Unterdeterminante $l^{(\varkappa)}$ — 2ten Grades von $\tau_\varkappa$ und der $n' - 1$ übrigen Determinanten τ_ν oder das Produkt einer Unterdeterminante $l^{(\varkappa)}$ — 1ten Grades von $\tau_\varkappa$, einer Unterdeterminante $l^{(\mu)}$ — 1ten Grades von τ_μ und der $n' - 2$ übrigen Determinanten τ_ν u. s. w.

Ein gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten $l^{(\nu)}$ — 1ten Grades von τ_ν ist daher auch gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten n — 1ten Grades

von D und umgekehrt muss, da keine zwei der Determinanten τ_ν einen Faktor gemein haben, jeder gemeinschaftliche Divisor $(r_\nu - r)^k$ aller Unterdeterminanten $n - 1^{\text{ten}}$ Grades von D auch gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten $l^{(\nu)} - 1^{\text{ten}}$ Grades einer Determinante τ_ν sein.

Ein gemeinschaftlicher Divisor $(r_\nu - r)^k$ aller Unterdeterminanten $l^{(\nu)} - 2^{\text{ten}}$ Grades einer Determinante τ_ν ist auch gemeinschaftlicher Divisor aller Unterdeterminanten $n - 2^{\text{ten}}$ Grades der Determinante D und umgekehrt u. s. w.

Die Fundamentaldeterminante $D(r)$ hat daher dieselben Elementarteiler wie $\Delta(r)$.

Da die Substitution N auch noch der weiteren Anforderung genügt, dass ihre Coefficienten durch die Elementarteiler der Fundamentaldeterminante vollkommen bestimmt sind, so möge sie die Normalform der Substitution B heissen.

Angenommen die Substitution B werde durch die Substitutionen von nicht verschwindender Determinante

$$\left.\begin{aligned} x^{(\nu)}_{gh} &= \sum_\mu [g\,h\,\mu]_\nu\ y_\mu \\ y^{(\nu)}_{gh} &= \sum_\mu [g\,h\,\mu]_\nu\ y'_\mu \end{aligned}\right\} \begin{matrix} g = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ e^{(\nu)}_h \\ h = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ m^{(\nu)} \\ \nu = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n' \end{matrix}$$

in die Normalform N transformirt. Dann müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\sum_\mu [1\,h\,\mu]_\nu\ y'_\mu = r_\nu \sum_\mu [1\,h\,\mu]_\nu\ y_\mu \\
&\sum_\mu [2\,h\,\mu]_\nu\ y'_\mu = r_\nu \sum_\mu [2\,h\,\mu]_\nu\ y_\mu + \sum_\mu [1\,h\,\mu]\ y_\mu \\
&\sum_\mu [3\,h\,\mu]_\nu\ y'_\mu = r_\nu \sum_\mu [3\,h\,\mu]_\nu\ y_\mu + \sum_\mu [2\,h\,\mu]\ y_\mu \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sum_\mu [e^{(\nu)}_h\,h\,\mu]_\nu\ y'_\mu = r_\nu \sum_\mu [e^{(\nu)}_h\,h\,\mu]_\nu\ y_\mu + \sum_\mu [e^{(\nu)}_h - 1\ h\,\mu]\ y_\mu
\end{aligned}$$

$$(h = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ m^{(\nu)};\ \nu = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n')$$

gleichbedeutend sein mit den Gleichungen

$$y'_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu}\ y_\mu \quad (\lambda = 1,\ 2.\ 3\ \ldots\ n)$$

Wir erhalten daher zur Bestimmung der Substitutionscoefficienten $[g\,h\,\mu]_\nu$ das folgende Gleichungssystem :

$$
\begin{aligned}
& r_\nu [1\ h\ \mu]_\nu = \sum_\lambda b_{\lambda\mu} [1\ h\ \lambda]_\nu \\
(\delta) \qquad & [1\ h\ \mu]_\nu + r_\nu [2\ h\ \mu]_\nu = \sum_\lambda b_{\lambda\mu} [2\ h\ \lambda]_\nu \\
& [2\ h\ \mu]_\nu + r_\nu [3\ h\ \mu]_\nu = \sum_\lambda b_{\lambda\mu} [3\ h\ \lambda]_\nu \qquad \mu = 1, 2, 3 \ldots n \\
& \qquad\qquad h = 0, 1, 2 \ldots m^{(\nu)} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots n' \\
& [e_h^{(\nu)} - 1\ h\ \mu]_\nu + r_\nu [e_h^{(\nu)}\ h\ \mu]_\nu = \sum_\lambda b_{\lambda\mu} [e_h^{(\nu)}\ h\ \lambda]_\nu
\end{aligned}
$$

mit der folgenden wesentlichen Zusatzbedingung: Die Determinante der $[g\,h\,\mu]_\nu$ darf nicht verschwinden.

Um das Transformationsproblem vollständig zu erledigen, haben wir demnach

1) zu beweisen, dass die Exponenten der Elementarteiler von $\Delta(r)$ den Ungleichungen

$$e_0^{(\nu)} \geqq e_1^{(\nu)} \geqq e_2^{(\nu)} \ldots \geqq e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)} \text{ genügen,}$$

2) nachzuweisen, dass man den Gleichungen (δ) durch ein System von n^2 Grössen $[g\ h\ \mu]_\nu$, dessen Determinante nicht verschwindet, genügen kann, und

3) anzugeben, wie sich aus einem derartigen Lösungssysteme der Gleichungen (δ) alle übrigen ableiten lassen.

Der Beweis der Ungleichungen (1) wird sich bei Gelegenheit des Nachweises zu (2) von selbst ergeben, weshalb ich sogleich zu dem letzteren übergehe.

III.

Nachweis eines Lösungssystems der Gleichungen (δ).

Die n^2 Unbekannten des Gleichungssystems (δ) sind durch die Natur der Aufgabe zu n Gruppen geordnet, von denen eine

$$[g\ h\ 1]_\nu \quad [g\ h\ 2]_\nu \quad \ldots\ldots \quad [g\ h\ n]_\nu$$

das Coefficientensystem einer Linearform $x_{gh}^{(\nu)}$ ist. Ein solches Coefficientensystem bezeichne ich als eine Lösung $[g\ h\ \mu]_\nu$ der Gleichungen (δ).

Mehrere Lösungen der Gleichungen (δ) heissen linear abhängig, wenn die aus ihnen gebildeten Linearformen es sind.

Die Aufgabe fordert n linear unabhängige Linearformen $x_{gh}^{(\nu)}$; sind diese nachgewiesen, so versteht es sich von selbst, dass durch diese sich jede andere Linearform darstellen lässt: insbesondere gilt dies also von jeder Linearform, deren Coefficientensystem ebenfalls eine Lösung von (δ) bildet.

Also folgt, dass mehr als n Lösungen von (δ) — diesen Ausdruck im obigen Sinne verstanden — stets linear abhängig sind.

Um die Gleichungen (δ) übersichtlicher schreiben zu können, führe ich einige abkürzende Bezeichnungen ein.

Die Funktion der Grössen $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ und r

$$\sum_{\lambda} b_{\lambda\mu}\, x_\lambda - r\, x_\mu$$

werde mit $\varphi_\mu\ (x \mid r)$ oder auch, sofern nur Funktionen desselben zweiten Arguments in Betracht kommen, kürzer mit $\varphi_\mu\ (x)$ bezeichnet.

Sei ferner

$$\varphi_\mu\ [\varphi\ (x \mid r) \mid r] = \varphi_\mu^{(2)}\ (x \mid r) = \varphi_\mu^{(2)}\ (x)$$
$$\varphi_\mu\ [\varphi^{(2)}\ (x)] = \varphi_\mu^{(3)}\ (x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und allgemein

$$\varphi_\mu\ [\varphi^{(m)}\ (x)] = \varphi_\mu^{(m+1)}\ (x),$$

endlich der Vollständigkeit wegen

$$\varphi_\mu^{(0)}\ (x) = x_\mu.$$

Nach diesen Definitionen ist

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu^{(2)}\ [\varphi^{(m)}\ (x)] &= \varphi_\mu\ \{\varphi\ [\varphi^{(m)}\ (x)]\} \\
&= \varphi_\mu\ \{\varphi^{(m+1)}\ (x)\} \\
&= \varphi_\mu^{(m+2)}\ (x) \\
\varphi_\mu^{(3)}\ [\varphi^{(m)}\ (x)] &= \varphi_\mu\ \{\varphi^{(2)}\ [\varphi^{(m)}\ (x)]\} \\
&= \varphi_\mu\ \{\varphi^{(m+2)}\ (x)\} \\
&= \varphi_\mu^{(m+3)}\ (x)
\end{aligned}$$

und allgemein ist

$$\varphi_\mu^{(p)}\ [\varphi^{(m)}\ (x)] = \varphi_\mu^{(m+p)}\ (x)$$

In den Gleichungen (δ) treten an Stelle von $x_1\ \ldots\ x_\lambda\ \ldots\ x_n$ die Symbole $[g\ h\ 1]_\nu\ \ldots\ [g\ h\ \lambda]_\nu\ \ldots\ [g\ h\ n]_\nu$; für diesen Fall möge die Bezeichnung $\varphi_\mu\ ([g\ h\ \cdot]_\nu \mid r)$ dienen. Dann lauten die Gleichungen (δ) wie folgt:

$$\varphi_\mu\left([1\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = 0$$
$$\varphi_\mu\left([2\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = [1\,h\,\mu]_\nu \qquad \mu = 1, 2, 3 \ldots n$$
$$\varphi_\mu\left([3\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = [2\,h\,\mu]_\nu \qquad h = 0, 1, 2, 3 \ldots m^{(\nu)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots n'$$
$$\varphi_\mu\left([e_h^{(\nu)}\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = [e_h^{(\nu)} - 1\,h\,\mu]_\nu$$

Es ist somit für $\mu = 1, 2, 3 \ldots n$ und $g = 1, 2, 3 \ldots e_h^{(\nu)}$

$$\varphi_\mu^{(g)}\left([g\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = 0$$

aber nicht für jedes μ

$$\varphi_\mu^{(g-1)}\left([g\,h\,\cdot]_\nu \mid r_\nu\right) = 0.$$

Ein Wertsystem x_μ, welches den n Gleichungen

$$\varphi_\mu^{(g)}\left(x \mid r_\nu\right) = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3 \ldots n)$$

aber nicht den n Gleichungen

$$\varphi_\mu^{(g-1)}\left(x \mid r_\nu\right) = 0$$

genügt, möge eine r_ν zugeordnete Lösung g^{ter} Ordnung des Gleichungssystems (δ) heissen. n linear unabhängige Lösungen $[g\,h\,\mu]_\nu$, welche dem Gleichungssystem (δ) genügen, bilden ein «vollständiges Lösungssystem» desselben.

Ist x_μ eine r_ν zugeordnete Lösung des Gleichungssystems (δ) von der Ordnung g, so sind

$$\varphi_\mu\left(x \mid r_\nu\right)\quad \varphi_\mu^{(2)}\left(x \mid r_\nu\right)\quad \ldots\ldots\quad \varphi_\mu^{(g-1)}\left(x \mid r_\nu\right)$$

r_ν zugeordnete Lösungen der Ordnung $g - 1$, $g - 2 \ldots 1$, wie sich unmittelbar aus der Relation

$$\varphi_\mu^{(g-h)}\left[\varphi^{(h)}\left(x \mid r_\nu\right) \mid r_\nu\right] = \varphi_\mu^{(g)}\left(x \mid r_\nu\right)$$

ergibt.

Diese Lösungen mögen aus x_μ abgeleitete Lösungen heissen.

Wir gehen darauf aus, n von einander linear unabhängige Lösungen des Gleichungssystems (δ) zu erhalten. Die Beantwortung der Frage, ob eine Anzahl Lösungen linear unabhängig sind, wird nun wesentlich erleichtert durch die beiden folgenden Hülfssätze.

(α) Seien x_μ, y_μ, $z_\mu \ldots r_\nu$ zugeordnete Lösungen des Gleichungssystems (δ); ihre Ordnungszahlen seien m, p, q .....

Sind dann die aus x_μ, y_μ, $z_\mu \ldots$ abgeleiteten Lösungen erster Ordnung

$$\varphi_\mu^{(m-1)}\left(x \mid r_\nu\right)\quad \varphi_\mu^{(p-1)}\left(y \mid r_\nu\right)\quad \varphi_\mu^{(q-1)}\left(z \mid r_\nu\right)\quad \ldots$$

von einander linear unabhängig, so sind die $m + p + q \ldots$ Lösungen

$$\begin{array}{llll} x_\mu & \varphi_\mu(x \mid r_\nu) & \varphi_\mu^{(2)}(x \mid r_\nu) \ldots & \varphi_\mu^{(m-1)}(x \mid r_\nu) \\ y_\mu & \varphi_\mu(y \mid r_\nu) & \varphi_\mu^{(2)}(y \mid r_\nu) \ldots & \varphi_\mu^{(p-1)}(y \mid r_\nu) \\ z_\mu & \varphi_\mu(z \mid r_\nu) & \varphi_\mu^{(2)}(z \mid r_\nu) \ldots & \varphi_\mu^{(q-1)}(z \mid r_\nu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

von einander linear unabhängig.

(β) $x_\mu, y_\mu, z_\mu \ldots$ mögen dieselbe Bedeutung haben wie eben. Ferner seien $x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu \ldots r_\varkappa$ zugeordnete Lösungen, $x''_\mu, y''_\mu, z''_\mu \ldots r_\sigma$ zugeordnete Lösungen u. s. w.

Die aus $x_\mu, y_\mu, z_\mu \ldots$ abgeleiteten Lösungen erster Ordnung seien unter einander linear unabhängig, ebenso die aus $x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu \ldots$ abgeleiteten, und ebenso die aus $x''_\mu, y''_\mu, z''_\mu \ldots$ abgeleiteten u. s. w.

Dann sind die Lösungen

$$x_\mu, y_\mu, z_\mu \ldots x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu \ldots x''_\mu, y''_\mu, z''_\mu \ldots$$

sammt allen aus ihnen abgeleiteten zusammengenommen linear unabhängig von einander.

Um zunächst (α) zu beweisen, nehme ich einen Augenblick an, der Satz sei unrichtig.

Dann muss eine Relation bestehen von der Form:

$$\begin{aligned} Q_\mu = {} & a_m\, x_\mu + a_{m-1}\, \varphi_\mu(x \mid r_\nu) + a_{m-2}\, \varphi_\mu^{(2)}(x \mid r_\nu) \ldots + a_1\, \varphi_\mu^{(m-1)}(x \mid r_\nu) \\ & + b_p\, y_\mu + b_{p-1}\, \varphi_\mu(y \mid r_\nu) + b_{p-2}\, \varphi_\mu^{(2)}(y \mid r_\nu) \ldots + b_1\, \varphi_\mu^{(p-1)}(y \mid r_\nu) \\ & + c_q\, z_\mu + c_{q-1}\, \varphi_\mu(z \mid r_\nu) + c_{q-2}\, \varphi_\mu^{(2)}(z \mid r_\nu) \ldots + c_1\, \varphi_\mu^{(q-1)}(z \mid r_\nu) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{aligned}$$

für $\mu = 1, 2, 3 \ldots n$.

Die Coefficienten, welche in Lösungen von höherer als der h^{ten} Ordnung multiplicirt sind, seien alle gleich Null, dagegen sei von den Coefficienten $a_h, b_h, c_h \ldots$ mindestens einer von Null verschieden. Wegen $Q_\mu = 0$ ist auch $\varphi_\mu^{(h-1)}(Q \mid r_\nu) = 0$ für $\mu = 1, 2, 3 \ldots n$, es besteht also zwischen den Lösungen erster Ordnung die lineare Relation

$$a_h\, \varphi_\mu^{(m-1)}(x \mid r_\nu) + b_h\, \varphi_\mu^{(p-1)}(y \mid r_\nu) + c_h\, \varphi_\mu^{(q-1)}(z \mid r_\nu) + \ldots\ldots = 0$$

(für $\mu = 1, 2, 3 \ldots n$)

in der mindestens einer der Coefficienten von Null verschieden ist, und dies widerspricht unserer Voraussetzung.

In ähnlicher Weise lässt sich (β) beweisen.

Wäre der Satz unrichtig, so müsste eine Relation von der Form

$$P_\mu = Q_\mu + Q'_\mu + Q''_\mu + \ldots = 0 \ (\mu = 1, 2, 3 \ldots n)$$

bestehen, wo Q_μ dieselbe Bedeutung hat, wie bei dem Beweise des vorigen Satzes und Q'_μ, Q''_μ ... von x'_μ, y'_μ, z'_μ ... und $r_\varkappa$ beziehungsweise von x''_μ, y''_μ, z''_μ... und r_σ ... in analoger Weise abhängen, wie Q_μ von x_μ, y_μ, z_μ ... und r_ν.

Ist von den in Q''_μ eingehenden Lösungen keine von höherer als der s^{ten} Ordnung, so ist

$$\varphi_\mu^{(s)}\,(Q''\,|\,r_\sigma) = 0 \text{ für } \mu = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Ferner ist

$$\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\sigma) = \sum_\lambda b_{\lambda\mu}\,x_\lambda - r_\sigma\,x_\mu = (r_\nu - r_\sigma)\,x_\mu + \varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu)$$

$$\varphi_\mu^{(2)}\,(x\,|\,r_\sigma) = (r_\nu - r_\sigma)^2\,x_\mu + 2\,(r_\nu - r_\sigma)\,\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu) + \varphi_\mu^{(2)}\,(x\,|\,r_\nu)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_\mu^{(s)}\,(x\,|\,r_\sigma) = (r_\nu - r_\sigma)^s\,x_\mu + s(r_\nu - r_\sigma)^{s-1}\,\varphi_\mu(x\,|\,r_\nu) + \ldots$$

Es ist daher $\varphi_\mu^{(s)}\,(Q\,|\,r_\sigma) =$

$$\begin{aligned}
&a_m \quad \left[(r_\nu - r_\sigma)^s\,x_\mu + s\,(r_\nu - r_\sigma)^{s-1}\,\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu) + \ldots\right] \\
&+ a_{m-1}\left[(r_\nu - r_\sigma)^s\,\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu) + s\,(r_\nu - r_\sigma)^{s-1}\,\varphi_\mu^{(2)}\,(x\,|\,r_\nu) + \ldots\right] \\
&+ a_{m-2}\left[(r_\nu - r_\sigma)^s\,\varphi_\mu^{(2)}\,(x\,|\,r_\nu) + s\,(r_\nu - r_\sigma)^{s-1}\,\varphi_\mu^{(3)}\,(x\,|\,r_\nu) + \ldots\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ b_p \quad \left[(r_\nu - r_\sigma)^s\,y_\mu + s\,(r_\nu - r_\sigma)^{s-1}\,\varphi_\mu\,(y\,|\,r_\nu) + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Formel zeigt, dass der Coefficient von x_μ in $\varphi_\mu^{(s)}\,(Q\,|\,r_\sigma)$ von Null verschieden ist, wenn der Coefficient von x_μ in Q_μ von Null verschieden ist. Wäre dieser Coefficient gleich Null, aber der Coefficient von $\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu)$ in Q_μ von Null verschieden, so müsste auch in $\varphi_\mu^{(s)}\,(Q\,|\,r_\sigma)$ der Coefficient von $\varphi_\mu\,(x\,|\,r_\nu)$ von Null verschieden sein u. s. w.

Ebenso können in $\varphi_\mu^{(s)}\,(Q'\,|\,r_\sigma)$ nur dann alle Coefficienten verschwinden, wenn in Q'_μ alle Coefficienten verschwinden.

In

$$\varphi_\mu^{(s)}\,(P\,|\,r_\sigma) = \varphi_\mu^{(s)}\,(Q\,|\,r_\sigma) + \varphi_\mu^{(s)}\,(Q'\,|\,r_\sigma) + \ldots = 0$$

können daher nicht alle Coefficienten verschwinden. Diese Gleichung gibt daher eine lineare Relation zwischen den Lösungen x_μ, y_μ, z_μ ... x'_μ, y'_μ, z'_μ und den aus ihnen abgeleiteten.

Durch Wiederholung der angewendeten Schlussweise gelangt man offenbar zuletzt zu einer linearen Relation zwischen Lösungen, die derselben Wurzel zugeordnet sind, und dies verstösst — wie sich aus dem eben bewiesenen Satze (α) ergibt — gegen unsere Voraussetzung.

Damit ist auch der zweite Hülfssatz bewiesen.

Um nachzuweisen, dass man den Gleichungen (δ) durch ein System von n linear unabhängigen Wertsystemen genügen kann, haben wir nun nur mehr zu beweisen:

Man kann $m^{(\nu)}+1$ r_ν zugeordnete Lösungen des Gleichungssystems (δ) von den Ordnungen $e_0^{(\nu)}$ $e_1^{(\nu)}$ ... $e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$ so wählen, dass die aus ihnen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sind.

Der Beweis dieses Satzes und der Beweis der Ungleichheiten (1) zwischen den Exponenten der Elementarteiler lassen sich auf den Beweis des folgenden einfacheren Satzes zurückführen:

(γ) Es lassen sich $k+1$ r_ν zugeordnete Lösungen der Ordnung $e_k^{(\nu)}$ so wählen, dass die aus ihnen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sind.

Nehmen wir an, der Satz (γ) sei bewiesen.

In der Reihe der Zahlen

$$e_0^{(\nu)}\ e_1^{(\nu)}\ e_2^{(\nu)}\ \ldots\ e_h^{(\nu)}\ \ldots\ e_i^{(\nu)}\ \ldots\ e_j^{(\nu)}\ \ldots\ e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

sei $e_h^{(\nu)}$ diejenige, welche nicht kleiner als eine der vorhergehenden, aber grösser als alle folgenden ist; unter diesen sei $e_i^{(\nu)}$ diejenige, welche nicht kleiner als eine der vorangehenden $e_{h+1}^{(\nu)}$ $e_{h+2}^{(\nu)}\ \ldots\ e_{i-1}^{(\nu)}$ aber grösser als alle folgenden ist; unter diesen sei $e_j^{(\nu)}$ diejenige, welche nicht kleiner als $e_{i+1}^{(\nu)}$ $e_{i+2}^{(\nu)}\ \ldots\ e_{j-1}^{(\nu)}$ aber grösser als alle folgenden ist u. s. w.

Auf Grund des Satzes (γ) können wir $h+1$ r_ν zugeordnete Lösungen $e_h^{(\nu)ter}$ Ordnung

$$[e_h^{(\nu)}\ 0\ \mu]_\nu\ [e_h^{(\nu)}\ 1\ \mu]_\nu\ \ldots\ [e_h^{(\nu)}\ h\ \mu]_\nu$$

so wählen, dass die aus ihnen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sind. Es lassen sich ferner $i+1$ Lösungen der Ordnung $e_i^{(\nu)}$ so wählen, dass die aus ihnen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sind. Für $h+1$ von diesen Lösungen kann man die aus den Lösungen

$$[e_h^{(\nu)}\ 0\ \mu]_\nu\ [e_h^{(\nu)}\ 1\ \mu]_\nu\ \ldots\ [e_h^{(\nu)}\ h\ \mu]_\nu$$

abgeleiteten Lösungen $e_i^{(\nu)ter}$ Ordnung nehmen, die übrigen $i-h$ seien

$$[e_i^{(\nu)}\ h+1\ \mu]_\nu\ [e_i^{(\nu)}\ h+2\ \mu]_\nu\ \ldots\ [e_i^{(\nu)}\ i\ \mu]_\nu.$$

Man kann ferner $j+1$ Lösungen der Ordnung $e_j^{(\nu)}$ so wählen, dass die aus ihnen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sind. $i+1$ von diesen Lösungen kann man mit den aus den Lösungen

$$[e_h^{(\nu)}\, 0\, \mu]_\nu \;\; [e_h^{(\nu)}\, 1\, \mu]_\nu \ldots [e_h^{(\nu)}\, h\, \mu]_\nu \;\; [e_i^{(\nu)}\, h+1\, \mu]_\nu \;\; [e_i^{(\nu)}\, h+2\, \mu]_\nu \ldots [e_i^{(\nu)}\, i\, \mu]_\nu$$

abgeleiteten Lösungen $e_j^{(\nu)ter}$ Ordnung zusammenfallen lassen u. s. w.

Auf Grund des Satzes (α) sind die eben bestimmten $m^{(\nu)}+1$ Lösungen und alle aus ihnen abgeleiteten Lösungen niedrigerer Ordnung linear unabhängig von einander.

Die Anzahl aller dieser Lösungen ist

$$L^{(\nu)} = (h+1)\, e_h^{(\nu)} + (i-h)\, e_i^{(\nu)} + (j-i)\, e_j^{(\nu)} + \ldots$$

Nach den über die Zahlen $e_k^{(\nu)}$ gemachten Voraussetzungen ist

$$L^{(\nu)} > l^{(\nu)} = e_0^{(\nu)} + e_1^{(\nu)} \ldots + e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

ausser wenn

$$e_0^{(\nu)} - e_1^{(\nu)} = e_2^{(\nu)} \ldots = e_h^{(\nu)};\; e_{h+1}^{(\nu)} = e_{h+2}^{(\nu)} \ldots = e_i^{(\nu)};\; e_{i+1}^{(\nu)} = e_{i+2}^{(\nu)} \ldots = e_j^{(\nu)} \ldots$$

ist. In diesem Fall ist $L^{(\nu)} = l^{(\nu)}$.

Nun sind nach (β) die den n' verschiedenen Wurzeln von $\Delta(r) = 0$ zugeordneten $\sum_{\nu=0}^{n'} L^{(\nu)}$ Lösungen alle von einander linear unabhängig, da die einer jeden Wurzel zugeordneten Lösungen unter sich linear unabhängig sind. Es kann demnach

$$\sum_{\nu=1}^{n'} L^{(\nu)} \text{ nicht grösser als } n = \sum_{\nu=1}^{n'} l^{(\nu)}$$

sein und, weil $L^{(\nu)} \geqq l^{(\nu)}$ ist, folgt hieraus $L^{(\nu)} = l^{(\nu)}$ und

$$e_0^{(\nu)} = e_1^{(\nu)} = e_2^{(\nu)} \ldots = e_h^{(\nu)} > e_{h+1}^{(\nu)} = e_{h+2}^{(\nu)} \cdots = e_i^{(\nu)} > e_{i+1}^{(\nu)} = e_{i+2}^{(\nu)} \cdots = e_j^{(\nu)} > \ldots.$$

Die Exponenten der Elementarteiler genügen folglich den Ungleichungen

$$(1) \qquad e_0^{(\nu)} \geqq e_1^{(\nu)} \geqq e_2^{(\nu)} \ldots \geqq e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}.$$

Von den am Schlusse des vorigen Abschnittes gestellten Aufgaben sind folglich die beiden ersten erledigt, sobald der Hülfssatz (γ) bewiesen ist.

IV.

Beweis des Hülfssatzes (γ).

Wir haben noch den Beweis des folgenden Satzes nachzuholen:

Sind alle Unterdeterminanten $n-k^{ten}$ Grades von $\Delta(r)$ durch $(r_\nu - r)^{l_k}$ und alle Unterdeterminanten $n-k-1^{ten}$ Grades durch $(r_\nu - r)^{l_{k+1}}$ $(l_{k+1} = l_k - e_k)$, aber letztere nicht alle durch eine höhere Potenz dieses Faktors teilbar, so kann man $k+1$ Wertsysteme

$$[e_k\, 0\, \mu] \quad [e_k\, 1\, \mu] \ldots\ldots [e_k\, k\, \mu]$$

so wählen, dass erstens die Gleichungen

$$\sum_\lambda b_{\lambda\mu}\,[g\,h\,\lambda] = r_\nu\,[g\,h\,\mu] + [g-1\,h\,\mu] \qquad \mu = 1, 2, 3 \ldots n$$

$$\sum_\lambda b_{\lambda\mu}\,[1\,h\,\lambda] = r_\nu\,[1\,h\,\mu] \qquad g = e_k, e_k - 1, e_k - 2 \ldots 2$$

$$h = 0, 1, 2 \ldots k$$

erfüllt sind, und dass zweitens die $k+1$ Wertsysteme $[1\,h\,\mu]$ $(h = 0, 1, 2 \ldots k)$ linear unabhängig sind.

Der Beweis stützt sich auf eine Eigenschaft der Determinante $S(r) =$

$$\begin{vmatrix}
b_{11}-r & b_{12} & b_{13} & \ldots\ldots & b_{1n} & p_{10} & p_{11} & \ldots & p_{1k} \\
b_{21} & b_{22}-r & b_{23} & \ldots\ldots & b_{2n} & p_{20} & p_{21} & \ldots & p_{2k} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33}-r & \ldots\ldots & b_{3n} & p_{30} & p_{31} & \ldots & p_{3k} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots\ldots & b_{nn}-r & p_{n0} & p_{n1} & \ldots & p_{nk} \\
q_{01} & q_{02} & \ldots & q_{03} & \ldots\ldots & q_{0n} & & & \\
q_{11} & q_{12} & & q_{13} & \ldots\ldots & q_{1n} & & & \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
q_{k1} & q_{k2} & & q_{k3} & \ldots\ldots & q_{kn} & & &
\end{vmatrix}$$

$S(r)$ ist, wie auch immer die Constanten $p\,q$ gewählt werden mögen, durch $(r_\nu - r)^{l_{k+1}}$ teilbar. Diese Constanten lassen sich aber offenbar so wählen, dass $S(r)$ durch keine höhere Potenz von $r_\nu - r$ teilbar ist. Die Unterdeterminante $\pi_{\lambda\mu}$ des Elements $p_{\lambda\mu}$ ist ebenfalls durch $(r_\nu - r)^{l_{k+1}}$ teilbar, aber die Unterdeterminanten $\pi_{1\lambda}, \pi_{2\lambda} \ldots \pi_{n\lambda}$ können nicht alle durch eine höhere Potenz von $r_\nu - r$ teilbar sein.

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\sum_{\lambda} b_{\lambda\mu}\ \pi_{\lambda h}(r) - r_\nu\ \pi_{\mu h}(r).$$

Derselbe geht aus $S(r)$ hervor, wenn man in dieser Determinante die Elemente der $n + h + 1^{\text{ten}}$ Verticalreihe

$$\begin{array}{llll} p_{1h} & p_{2h} \cdots p_{\mu h} & \cdots & p_{nh} \text{ durch} \\ b_{1\mu} & b_{2\mu} \cdots b_{\mu\mu} - r_\nu & \cdots & b_{n\mu} \text{ ersetzt.} \end{array}$$

Subtrahirt man dann die μ^{te} Verticalreihe von der $n + h + 1^{\text{ten}}$, so verschwinden in der letzteren die ersten n Elemente mit Ausnahme des μ^{ten}, welches den Wert $r - r_\nu$ erhält. Die letzten $k + 1$ Elemente erhalten die Werte

$$-q_{0\mu} \quad -q_{1\mu} \quad -q_{2\mu} \cdots -q_{k\mu}$$

Die Unterdeterminanten dieser letzteren Elemente lassen sich als Aggregate darstellen, in denen jedes Glied das Produkt aus einer Unterdeterminante $n - k^{\text{ten}}$ Grades von $\Delta(r)$ und zwei aus den p und q gebildeten Determinanten k^{ten} Grades ist. Diese Unterdeterminanten sind daher alle durch $(r_\nu - r)^{l_k}$ teilbar. Es ist daher

$$\sum_{\lambda} b_{\lambda\mu}\ \pi_{\lambda h}(r) - r_\nu\ \pi_{\mu h}(r) = (r - r_\nu)\ \pi_{\mu h}(r) + (r - r_\nu)^{l_k} f(r)$$

wo $f(r)$ eine ganze Funktion von r bedeutet.

Diese Gleichung differenciiren wir der Reihe nach l_{k+1} mal, $l_{k+1} + 1$ mal ... $l_k - 1$ mal nach r und setzen dann $r = r_\nu$. Es ergibt sich

$$\sum_{\lambda} b_{\lambda\mu} \frac{d^{l_{k+1}}\ \pi_{\lambda h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}}} - r_\nu \frac{d^{l_{k+1}}\ \pi_{\mu h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}}} = 0$$

$$\sum_{\lambda} b_{\lambda\mu} \frac{d^{l_{k+1}+g}\ \pi_{\lambda h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}+g}} - r_\nu \frac{d^{l_{k+1}+g}\ \pi_{\mu h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}+g}} = (l_{k+1} + g) \frac{d^{l_{k+1}+g-1}\ \pi_{\mu h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}+g-1}}$$

für $\mu = 1, 2, 3 \ldots n$; $g = 1, 2, 3 \ldots e_k - 1$; $h = 0, 1, 2 \ldots k$.

Setzt man

$$\frac{d^{l_{k+1}+g}\ \pi_{\mu h}(r_\nu)}{d\, r_\nu^{\,l_{k+1}+g}} = (l_{k+1} + g)!\ [g + 1\ h\ \mu],$$

so gehen die vorstehenden Gleichungen in die zu beweisenden Gleichungen unseres Satzes über.

Es bleibt noch zu beweisen, dass die $k + 1$ Wertsysteme $[1\ h\ \mu]$ $(h = 0, 1, 2 \ldots k)$ linear unabhängig sind.

Aus der Identität

$$\sum_{\mu} p_{\mu i}\, \pi_{\mu h}(r) = \binom{h}{i} S(r)$$

ergibt sich, wenn man l_{k+1} mal nach r differenciirt und dann $r = r_\nu$ setzt,

$$l_{k+1}! \sum_{\mu} p_{\mu i}\, [1\ h\ \mu] = \binom{h}{i} \frac{d^{l_{k+1}} S(r_\nu)}{d r_\nu^{l_{k+1}}}.$$

Der Differentialquotient auf der rechten Seite verschwindet nicht, weil $S(r)$ den Faktor $r_\nu - r$ genau l_{k+1} mal enthält. Von den $k+1$ Wertsystemen $[1\ h\ \mu]$ genügen daher k den n Gleichungen

$$\sum_{\mu} p_{\mu i}\, [1\ h\ \mu] = 0$$

während eines denselben nicht genügt.

Diese Wertsysteme sind daher linear unabhängig.

V.

Das allgemeinste Lösungssystem der Gleichungen (δ).

Im Vorhergehenden wurde bewiesen, dass es vollständige Lösungssysteme der Gleichungen (δ) gibt. Es handelt sich nun darum, die willkürlichen Parameter nachzuweisen, von denen ein derartiges Lösungssystem abhängt.

Für die Lösungen

$$[e_0^{(\nu)}\ 0\ \mu]_\nu\ [e_1^{(\nu)}\ 1\ \mu]_\nu\ [e_2^{(\nu)}\ 2\ \mu]_\nu \ \ldots\ [e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}\ m^{(\nu)}\ \mu]_\nu$$

können wir beliebige r_ν zugeordnete Lösungen $e_0^{(\nu)ter}$, $e_1^{(\nu)ter}$, $e_2^{(\nu)ter}$ $\ldots$ $e_{m^{(\nu)}}^{(\nu)ter}$ Ordnung nehmen, mit der einzigen Einschränkung, dass die aus diesen Lösungen abgeleiteten Lösungen erster Ordnung linear unabhängig sein müssen. Sind diese Lösungen gewählt, so sind die aus ihnen abgeleiteten vollkommen bestimmt.

Den n Gleichungen $\varphi_\mu^{\left(e_h^{(\nu)}\right)}(x \mid r_\nu) = 0$ $(\mu = 1, 2 \ldots n)$, welche die Lösungen $e_h^{(\nu)ter}$ Ordnung bestimmen, genügen nun alle diejenigen von den $l^{(\nu)}$ r_ν zugeordneten Lösungen $[g\ h\ \mu]_\nu$, deren Ordnung nicht höher als $e_h^{(\nu)}$ ist.

Eine lineare Combination der Wertsysteme $[g\ h\ \mu]_\nu$, deren Ordnung nicht höher als $e_h^{(\nu)}$ ist, ist daher im Allgemeinen ebenfalls eine Lösung $e_h^{(\nu)ter}$ Ordnung und es lässt sich zeigen, dass sich jede Lösung $e_h^{(\nu)ter}$ Ordnung in dieser Form darstellen lässt.

Sei, um dies zu beweisen, x_μ eine beliebige r_ν zugeordnete Lösung der Ordnung $e_h^{(\nu)}$, Q_μ eine lineare Combination der $l^{(\nu)}$ r_ν zugeordneten Wertsysteme $[g\ h\ \mu]_\nu$ $(g = 1, 2, 3 \ldots e_h^{(\nu)};\ h = 0, 1, 2 \ldots m^{(\nu)})$ und P_μ eine lineare Combination der $n - l^{(\nu)}$ übrigen Wertsysteme $[g\ h\ \mu]_\varkappa$. Ueber die in P_μ und Q_μ enthaltenen n Constanten kann man in der Weise verfügen, dass

$$x_\mu = P_\mu + Q_\mu \text{ wird für } \mu = 1, 2 \ldots n.$$

Da

$$\varphi_\mu^{\left(e_0^{(\nu)}\right)}(x|r_\nu) = 0 \text{ ist und } \varphi_\mu^{\left(e_0^{(\nu)}\right)}(Q|r_\nu) = 0$$

ist für jeden Wert von μ, so ist auch

$$\varphi_\mu^{\left(e_0^{(\nu)}\right)}(P|r_\nu) = 0 \text{ für } \mu = 1, 2 \ldots n.$$

Diese Gleichungen geben, wie im III. Abschnitte beim Beweis des Hülfssatzes (β) gezeigt wurde, eine lineare Relation zwischen den in P_μ eingehenden Lösungen $[g\ h\ \mu]_\varkappa$, ausser wenn in P_μ alle Coefficienten verschwinden.

Da die $[g\ h\ \mu]_\varkappa$ linear unabhängig sind, so ist daher

$$P_\mu = 0 \text{ für } \mu = 1, 2 \ldots n \text{ und } x_\mu = Q_\mu.$$

Die in Q_μ eingehenden Lösungen können nun nicht von höherer als der $e_h^{(\nu)ten}$ Ordnung sein, denn sonst würden die Gleichungen $\varphi_\mu^{\left(e_0^{(\nu)}\right)}(Q|r_\nu) = 0$ zu einer linearen Relation zwischen einer Anzahl der $[g\ h\ \mu]_\nu$ führen, was unmöglich ist.

Die Anzahl aller Lösungen $[g\ h\ \mu]_\nu$, welche r_ν zugeordnet sind, ist $= l^{(\nu)}$. Sie sind alle von nicht höherer als der $e_0^{(\nu)ten}$ Ordnung. Aber unter ihnen finden sich solche, die von nicht höherer als der $e_1^{(\nu)ten}$ Ordnung sind; ihre Anzahl ist

$$l^{(\nu)} - \left(e_0^{(\nu)} - e_1^{(\nu)}\right) = 2\ l_1^{(\nu)} - l_2^{(\nu)}.$$

Unter diesen sind von nicht höherer als der $e_2^{(\nu)ten}$ Ordnung

$$l^{(\nu)} - \left(e_0^{(\nu)} - e_2^{(\nu)}\right) - \left(e_1^{(\nu)} - e_2^{(\nu)}\right) = 3\ l_2^{(\nu)} - 2\ l_3^{(\nu)}$$

Von nicht höherer als der $e_h^{(\nu)ten}$ Ordnung sind

$$l^{(\nu)} - \left(e_0^{(\nu)} - e_h^{(\nu)}\right) - \left(e_1^{(\nu)} - e_h^{(\nu)}\right) \ldots - \left(e_{h-1}^{(\nu)} - e_h^{(\nu)}\right) = (h+1)\ l_h^{(\nu)} - h\ l_{h+1}^{(\nu)}$$

Die Lösung $e_h^{(\nu)ter}$ Ordnung $[e_h^{(\nu)}\ h\ \mu]_\nu$ hängt demnach von $(h+1)\ l_h^{(\nu)} - h\ l_{h+1}^{(\nu)}$ willkürlichen Parametern ab und ist in denselben linear und homogen; also hängen die $l^{(\nu)}$ der Wurzel r_ν zugeordneten Lösungen von

$$l^{(\nu)} + 2\left(l_1^{(\nu)} + l_2^{(\nu)} \ldots + l_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}\right)$$

Parametern in gleicher Weise ab.

Ein vollständiges Lösungssystem der Gleichungen (δ) hängt somit von

$$M = n + 2\sum_{\nu=1}^{n'}\left(l_1^{(\nu)} + l_2^{(\nu)} \ldots + l_{m^{(\nu)}}^{(\nu)}\right)$$

willkürlichen Parametern ab und ist in denselben linear und homogen.

Damit ist die Theorie des Gleichungssystems (δ) zum Abschluss gebracht.

Diese Gleichungen, deren Anzahl $= n^2$ ist, enthalten die notwendigen und ausreichenden Bedingungen zwischen den Grössen $b_{\lambda\mu}$, r_ν und $[g\ h\ \mu]_\nu$, welche erfüllt sein müssen, damit die Substitution B in die obige Normalform N transformirt werden kann. Wir fanden, dass wir M von den n^2 $[g\ h\ \mu]_\nu$ willkürlich lassen und durch sie die $n^2 - M$ übrigen bestimmen können und folglich, dass unter den Bedingungen unserer Untersuchung $n^2 - M$ von den Gleichungen wesentlich, die M übrigen überzählig sind.

Die Elimination der n^2 Grössen $[g\ h\ \mu]_\nu$ führt also zu M Relationen zwischen den $b_{\lambda\mu}$ und den n' Wurzeln r_ν: diese sind die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, dass B durch irgend eine Substitution in N transformirt werden kann, nämlich bei vorgeschriebenen Werten der n' Wurzeln $r_1\ r_2 \ldots$

Die Bedingungen, damit dies bei irgend welchen Werten dieser Wurzeln möglich ist, ergeben sich also durch Elimination von $r_1\ r_2 \ldots$

Aber da diese Wurzeln durch die Grössen $b_{\lambda\mu}$ vollkommen bestimmt sind, so ersieht man, dass von diesen M Relationen n' zur Bestimmung von $r_1\ r_2 \ldots$ führen, die $M - n'$ übrigen überzählig sind.

Die Elimination der r_ν liefert also

$$M - n'$$

Relationen $\Pi = 0$ zwischen den Coefficienten der Substitution B, welche erforderlich sind und hinreichen, damit die Fundamentaldeterminante $\Delta(r)$ von B die ungleichen Wurzelfaktoren in der vorgeschriebenen Anzahl n' und ihre Elementarteiler zu den vorgeschriebenen Graden $e_h^{(\nu)}$ besitzt, mithin in eine Normalform N von der durch diese Zahlenangaben bestimmten Gestalt transformirt werden kann.

Es handelt sich nun weiter darum, wie viele und welche Relationen zwischen den Coefficienten der Substitution P erforderlich sind, damit P in diese Substitution B transformirt werden kann.

Dazu gehört 1), dass P für irgend welche r_ν in N transformirt werden kann, dies gibt $M - n'$ Relationen $\Pi' = 0$ zwischen den Coefficienten $p_{\lambda\mu}$; sie sind von derselben Form wie die obigen Gleichungen $\Pi = 0$; dazu kommt aber 2) die Bedingung, dass $r_1\ r_2 \ldots$ in beiden Fällen die gleichen Werte haben müssen. Sind $w\,(b\,|\,r) = 0$ die oben nachgewiesenen n' für die Bestimmung von $r_1\ r_2 \ldots$ wesentlichen Relationen, so ergeben sich die nämlichen Relationen für die $p_{\lambda\mu}$, also in der Form $w\,(p\,|\,r) = 0$. Die Elimination der r_ν liefert also zu den obigen $M - n'$ Relationen $\Pi' = 0$ zwischen den $p_{\lambda\mu}$ allein noch n' Relationen zwischen den $b_{\lambda\mu}$ und $p_{\lambda\mu}$.

Folglich ist M die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen, denen die $p_{\lambda\mu}$ genügen müssen, damit P die gleiche Normalform N hat wie die durch die vorgeschriebene Gestalt von N specialisirte Substitution B.

VI.

Einteilung der Substitutionen in Classen.

Der für die Zahl M gefundene Ausdruck zeigt, dass dieselbe nur von den Graden der grössten Divisoren abhängt, welche die Unterdeterminanten eines jeden Grades von $\Delta(r)$ gemein haben; sie ist unabhängig von den Werten, welche die Exponenten der Elementarteiler im übrigen haben.

Es liegt nun nahe alle Substitutionen, für welche diese Gradzahlen dieselben sind, in eine Classe zusammenzufassen.

Unter den Substitutionen einer Classe sind besonders bemerkenswert die «allgemeinen» Substitutionen der Classe, deren Fundamentaldeterminanten nur Elementarteiler ersten Grades haben.

Für diese Substitutionen nehmen die Normalform und die Substitutionen, welche die Normalform in sich selbst transformiren, eine besonders einfache Gestalt an.

Sei P eine derartige Substitution, $\Delta'(r)$ die Fundamentaldeterminante derselben. Die verschiedenen Wurzelfaktoren von $\Delta'(r)$ seien

$$\varrho_1 - r \quad \varrho_2 - r \ldots \varrho_{n''} - r$$

und zwar sei $\varrho_\nu - r$ λ_ν facher Wurzelfaktor von $\Delta'(r)$. $\varrho_\nu - r$ muss dann auch Faktor aller Unterdeterminanten $n - \lambda_\nu + 1^{ten}$ Grades und $\lambda_\nu - h$ facher Faktor aller Unterdeterminanten $n - h^{ten}$ Grades sein.

Die Normalform der Substitution P wird in diesem Fall gegeben durch die Gleichungen:

$$y_g^{(\nu)} = \varrho_\nu \, x_g^{(\nu)} \quad (g = 1, 2, 3 \ldots \lambda^{(\nu)};\ \nu = 1, 2, 3 \ldots n'')$$

und die allgemeinste Substitution, welche die Normalform in sich selbst transformirt, ist die folgende:

$$y_g^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{\lambda^{(\nu)}} a_{gh}^{(\nu)} \, y_h^{(\nu)} \qquad g = 1, 2 \ldots \lambda^{(\nu)}$$

$$x_g^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{\lambda^{(\nu)}} a_{gh}^{(\nu)} \, x_h^{(\nu)} \qquad \nu = 1, 2 \ldots n''$$

Die Bezeichnung dieser Art von Substitutionen als allgemeine rechtfertigt sich durch den Satz:

Jede Substitution, deren Fundamentaldeterminante Elementarteiler höheren Grades hat, lässt sich als Grenzfall einer allgemeinen Substitution derselben Classe betrachten.

Um denselben zu beweisen, ersetze ich die Gleichungen der Substitution B:

$$y_\lambda = \sum_\mu b_{\lambda\mu} \, x_\mu \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

durch die äquivalenten Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} &[1\,h\,y]_\nu = r_\nu \, [1\,h\,x]_\nu \\ &[2\,h\,y]_\nu = r_\nu \, [2\,h\,x]_\nu + [1\,h\,x]_\nu \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[e_h^{(\nu)}\,h\,y]_\nu = r_\nu \, [e_h^{(\nu)}\,h\,x] + [e_h^{(\nu)} - 1\,h\,x]_{(\nu)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &h = 0, 1, 2 \ldots m^{(\nu)} \\ &\nu = 1, 2, 3 \ldots n' \end{aligned}$$

wo $[g\,h\,y]_\nu$ $[g\,h\,x]_\nu$ zur Abkürzung für

$$\sum_\mu [g\,h\,\mu]\, y_\mu \quad \sum_\mu [g\,h\,\mu]_\nu \, x_\mu$$

geschrieben ist.

Diese Gleichungen lassen sich leicht als Grenzfall der folgenden darstellen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&[1\ h\ y]'_\nu = r_\nu^{(1)}\ [1\ h\ x]'_\nu \\
&[2\ h\ y]'_\nu = r_\nu^{(2)}\ [2\ h\ x]'_\nu \qquad && h = 0,\ 1,\ 2 \ldots m^{(\nu)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \nu = 1,\ 2,\ 3 \ldots n' \\
&[e_h^{(\nu)}\ h\ y]'_\nu = r_\nu^{\left(e_h^{(\nu)}\right)}\ [e_h^{(\nu)}\ h\ x]'_\nu
\end{aligned}
$$

Zu diesem Zweck betrachte ich die Grössen $r_\nu^{(g)}$ als variabel und den Ausdruck $[g\ h\ \mu]'_\nu$ als stetige Funktion von $r_\nu^{(g)}$. Lässt man nun die $e_0^{(\nu)}$ Variabeln $r_\nu^{(1)}\ r_\nu^{(2)}\ \ldots$ sich immer mehr dem Wert r_ν nähern und zuletzt mit r_ν zusammenfallen, so erhält man an der Grenze statt der Gleichungen (2) die folgenden:

$$
\begin{aligned}
&[1\ h\ g]'_\nu = r_\nu\,[1\ h\ x]'_\nu \\
&\frac{d}{d r_\nu}[1\ h\ y]'_\nu = r_\nu \frac{d}{d r_\nu}[1\ h\ x]'_\nu + [1\ h\ x]'_\nu \\
&\frac{d^2}{d r_\nu^2}[1\ h\ y]'_\nu = r_\nu \frac{d^2}{d r_\nu^2}[1\ h\ x]'_\nu + 2\,\frac{d}{d r_\nu}[1\ h\ x]'_\nu \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen werden mit den Gleichungen (1) identisch, wenn man

$$[1\ h\ \mu]'_\nu = [1\ h\ \mu]_\nu \text{ und } \frac{1}{g!}\,\frac{d^g}{d r_\nu^g}[1\ h\ \mu]'_\nu = [g\ h\ \mu]_\nu$$

setzt.

Die Form der Gleichungen (2) zeigt, dass die Fundamentaldeterminante $\Delta'(r)$ der Substitution nur Elementarteiler ersten Grades besitzt.

Jedem Wurzelfaktor $r_\nu - r$ von $\Delta(r)$ entsprechen $e_0^{(\nu)}$ verschiedene Wurzelfaktoren

$$r_\nu^{(1)} - r\quad r_\nu^{(2)} - r \ldots r_\nu^{\left(e_0^{(\nu)}\right)} - r$$

von $\Delta'(r)$. Die Zahl der verschiedenen Wurzelfaktoren von $\Delta'(r)$ ist demnach

$$n'' = \sum_{\nu=1}^{n'} e_0^{(\nu)} = n' + \sum_{\nu=1}^{n'} \left(e_0^{(\nu)} - 1\right)$$

Der Grad, zu welchem $\Delta'(r)$ den Faktor $r_\nu^{(g)} - r$ enthält, ist gleich der Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe

$$0,\ 1,\ 2 \ldots m^{(\nu)}$$

für welche $e_h^{(\nu)} \geqq g$ ist. Est ist demnach $r_\nu^{(g)} - r$

$m^{(\nu)} + 1$ facher Faktor von $\Delta'(r)$, wenn $g = 1, 2 \ldots e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}}$ ist,

$m^{(\nu)}$ facher Faktor, wenn $g = e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}} + 1,\ e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}} + 2 \ldots e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}-1}$ ist,

$\ldots\ h + 1$ facher Faktor, wenn $g = e^{(\nu)}_{h+1} + 1,\ e^{(\nu)}_{h+1} + 2 \ldots e^{(\nu)}_{h}$ ist.

Da $\Delta'(r)$ nur Elementarteiler ersten Grades besitzt, so ist jeder k fache Wurzelfaktor von $\Delta'(r)$ $k - h$ facher Faktor aller Unterdeterminanten $n - h^{ten}$ Grades. Der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Unterdeterminanten $n - h^{ten}$ Grades von $\Delta'(r)$ ist demnach vom Grade

$$\sum_{\nu=1}^{n'} \Big[(m^{(\nu)} + 1 - h)\ e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}} + (m^{(\nu)} - h)\left(e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}-1} - e^{(\nu)}_{m^{(\nu)}}\right) \ldots + 2\left(e^{(\nu)}_{h+1} - e^{(\nu)}_{h+2}\right) + \left(e^{(\nu)}_{h} - e^{(\nu)}_{h+1}\right)\Big] = \sum_{\nu=1}^{n'} l^{(\nu)}_{h}$$

d. h. vom selben Grade wie der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Unterdeterminanten $n - h^{ten}$ Grades von $\Delta(r)$.

Denken wir die Gleichungen (2) nach y_λ aufgelöst, wodurch sich

$$y_\lambda = \sum_{\mu} p_{\lambda\mu}\ x_\mu \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n)$$

ergebe.

Zwischen den Coefficienten $p_{\lambda\mu}$ bestehen $M - n''$ Bedingungsgleichungen. Sie drücken aus, dass die Unterdeterminanten der verschiedenen Grade von $\Delta(r)$ gemeinschaftliche Divisoren von bestimmten Graden haben. Dieselben Bedingungsgleichungen müssen auch zwischen den Coefficienten $b_{\lambda\mu}$ bestehen. Die Coefficienten $b_{\lambda\mu}$ müssen aber noch

$$n'' - n' = \sum_{\nu=1}^{n'} \left(e^{(\nu)}_{0} - 1\right)$$

weiteren Bedingungsgleichungen genügen.

Dieselben drücken aus, dass die $e^{(\nu)}_{0}$ verschiedenen Wurzeln von $\Delta'(r) = 0$, welche einer Wurzel r_ν von $\Delta(r) = 0$ entsprechen, zusammenfallen.